$\cdot \lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1 \quad \text{car } \frac{2}{3} \in]-1,1[.$

PROBLEME

I-1)a) g est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall x \geq 1$,

$$g'(x) = \text{Log}x + x\frac{1}{x} - 1 = \text{Log}x \geq 0$$

D'où le tableau de variation de

x	1		$+\infty$
g'(x)	0	+	
g(x)	0	↗	$+\infty$

$\cdot \lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x\to+\infty} [x(\text{Log}x - 1) + 1] = +\infty.$

b) 0 est le minimum de g sur $[1,+\infty[$ (d'après le tableau de variation de g) $\Rightarrow \forall x \geq 1, g(x) \geq 0.$

2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x-1}{\text{Log}x} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{1}{\left(\frac{\text{Log}x}{x-1}\right)} = \frac{1}{1} = 1 = f(1)$

$\Rightarrow$ f est continue en 1.

3)a) $t \in [1;+\infty[$:

$$\cdot\ t-1-(t-1)^2 - \left(1-\frac{1}{t}\right) = (t-1)\left[1-(t-1)-\frac{1}{t}\right]$$

$$= (t-1)\left[\frac{t-t^2+t-1}{t}\right] = (t-1)\frac{-(t-1)^2}{t} \leq 0$$

Donc $t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t}$

$$\cdot \left(1-\frac{1}{t}\right) - (t-1) = (t-1)\left[\frac{1}{t}-1\right]$$

$$= (t-1)\frac{1-t}{t} = -\frac{(t-1)^2}{t} \leq 0$$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{t} \leq t-1$

Bilan : $\forall t \in [1;+\infty[; t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t} \leq t-1.$

b) Soit $x \in [1;+\infty[$ on a

$$\forall t \in [1;x]; t-1-(t-1)^2 \leq 1-\frac{1}{t} \leq t-1$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(t-1-(t-1)^2\right)dt \leq \int_1^x \left(1-\frac{1}{t}\right)dt \leq \int_1^x (t-1)dt$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{2}t^2 - t - \frac{1}{3}(t-1)^3\right]_1^x \leq [t-\text{Log}t]_1^x \leq \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_1^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} \leq x-1-\text{Log}x \leq \frac{(x-1)^2}{2}.$$